**Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное**

**образовательное учреждение высшего образования**

**«Московский технический университет связи и информатики»**

**Семенова Т.И., Сосновиков Г.К.**

**Лабораторный практикум**

**по дисциплине**

**Численные методы**

**для дистанционного обучения студентов**

**по направлению подготовки**

**11.03.02 - Инфокоммуникационные технологии и системы связи**

**Москва 2020**

**Лабораторный практикум**

**по дисциплине**

**Численные методы**

Составители: Т.И. Семенова, к.т.н., доцент

Г.К. Сосновиков, к.т.н., доцент

### Общие рекомендации по использованию лабораторного практикума

Содержание данного практикума соответствует стандарту подготовки специалистов по направлению 11.03.02 – «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и может быть использовано для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения. Практикум включает 6 тем:

[***Тема 1. Методы решения нелинейных уравнений***](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355350#_Toc57355350)

***Тема*** [***2***](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355373#_Toc57355373)***. Интерполяция функций***

[***Тема 3. Численное интегрирование***](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355391#_Toc57355391)

***Тема*** [***4. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений***](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355408#_Toc57355408)

***Тема*** [***5. Одномерная оптимизация***](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355423#_Toc57355423)

***Тема 6. Методы оптимизации функций нескольких переменных***

Изучение каждой темы следует начинать с теоретического материала [1]. Схемы алгоритмов изучаемых методов представлены в учебном пособии [2]. Используемые при выполнении лабораторных работ средства программирования и функции, предназначенные для решения аналогичных задач в пакете Scilab, подробно изложены в учебнике [3]. В конце каждой темы представлены контрольные вопросы, охватывающие весь материал изучаемой темы, которые позволяют осуществить контроль и самоконтроль знаний.

***Общее задание*** каждой лабораторной работы представляет собой перечень пунктов, которые необходимо выполнить при выполнении лабораторной работы по конкретной теме.

***Индивидуальное задание*** представлено в описании лабораторной работы в форме соответствующей таблице вариантов заданий. Номер индивидуального задания выбирается в соответствии с указанием преподавателя.

Лабораторные работы по всем темам имеют следующие обязательные этапы:

* подготовительная работа к расчетам (анализ функции, выбор начальных приближений, проверка условий сходимости и т.п.);
* проведение расчета трех итераций 1-м методом (с обязательным представлением расчетных формул и промежуточных результатов) с использованием средств математического пакета Scilab [3].
* решение задачи с заданной точностью 2-м методом с использованием средств программирования.
* сведение полученных данных в соответствующие таблицы;
* при необходимости, геометрическая интерпретация полученных результатов;
* анализ и выводы по полученным результатам
* решение поставленной задачи с использованием соответствующих функций математического пакета Scilab.

Описание каждой лабораторной работы содержит примеры ее решения аналогичных задач с использованием всех изучаемых методов.

Отчет по лабораторной работе должен быть оформлен аккуратно и содержать все пункты выполнения задания. Титульный лист отчета должен содержать: название темы, номер варианта индивидуального задания, а также сведения о студенте, выполнившего задание и преподавателе, ведущем лабораторные работы.

### Лабораторная работа №1

### по теме *«Методы решения нелинейных уравнений»*

#### 1.1. Вопросы, подлежащие изучению

1. Постановка задачи численного решения нелинейных уравнений.
2. Этапы численного решения уравнения.
3. Аналитический и графический методы отделения корней.
4. Уточнение корня методами половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
5. Графическая иллюстрация методов половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
6. Условие окончания вычислений при использовании методов половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
7. Сходимость метода итерации, выбор начального приближения, правило выбора итерирующей функции и оценка погрешности метода итерации.
8. Теорема о сходимости метода Ньютона и оценка погрешности метода.
9. Правило выбора неподвижной точки, начальной точки и условие сходимости метода хорд.
10. Условия окончания вычислений в методах итерации, Ньютона и хорд.
11. Сравнение методов половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.

#### 1.2. Общее задание

1. **Выбрать индивидуальное задание из табл. 1-1:**

* нелинейное уравнение;
* методы решения нелинейного уравнения для выполнения 3-х итераций;

1. **Отделить корни заданного уравнения графическим и аналитическим методом** с использованием средств пакета Scilab**.**
2. **Для каждого из заданных методов провести исследование функции нелинейного уравнения**:

* проверить выполнение условий сходимости вычислительного процесса, в случае расходящегося процесса – сделать необходимые преобразования для обеспечения сходимости;
* выбрать начальное приближение к корню;
* сформулировать условие окончания этапа уточнения корня.

1. **С использованием итерационной формуле 1-го заданного методу провести расчет трех итераций** с использованием средств мат. пакета. Результаты расчета свести в табл. 1-2.
2. О**ценить погрешность** результата после 3-х итераций.
3. Для 2-го заданного метода **выполнить решение уравнения с точностью 10-4**, создав программу, реализующую заданный метод. Произвести расчет, а результаты решений свести в табл. 1-2.
4. **Найти решение нелинейного уравнения** на отделенном отрезке с использованием функции **fsolve** пакета Scilab**.**

#### 1.3. Варианты задания

Таблица 1-1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Уравнение** | 1-й метод | 2-й метод | **№** | **Уравнение** | 1-й метод | 2-й метод |
| **1** | **x - cos(x / 3) = 0** | 1 | 4 | **16** | **sin(1 – 0.2x2) – x = 0** | 3 | **4** |
| **2** | **x + ln(4x) – 1 = 0** | 3 | 1 | **17** | **ex – e-x – 2 = 0** | 2 | **1** |
| **3** | **ex – 4 e-x – 1 = 0** | 2 | 4 | **18** | **x – sin(1 / x) = 0** | 4 | **1** |
| **4** | **x ex – 2 = 0** | 3 | 2 | **19** | **ex + ln(x) – x = 0** | 1 | **2** |
| **5** | **4 (x2 + 1) ln(x) – 1 = 0** | 1 | 3 | **20** | **1–x+sin(x)–ln(1+x) = 0** | 1 | **3** |
| **6** | **2 – x – sin(x / 4) = 0** | 4 | 1 | **21** | **(1–x)1/2–cos(1–x) = 0** | 4 | **1** |
| **7** | **x2 + ln(x) – 2 = 0** | 1 | 2 | **22** | **sin(x2)+cos(x2)–10x = 0** | 3 | **2** |
| **8** | **cos(x)–(x + 2)1/2 + 1 = 0** | 2 | 3 | **23** | **x2 – ln(1 + x) – 3 = 0** | 2 | **3** |
| **9** | **4 (1 + x1/2) ln(x) – 1 = 0** | 2 | 1 | **24** | **cos(x / 2) ln(x – 1) = 0** | 1 | **2** |
| **10** | **5 ln(x) – x1/2 = 0** | 2 | 3 | **25** | **cos(x/5) (1+x)1/2–x = 0** | 1 | **3** |
| **11** | **ex + x3 – 2 = 0** | 1 | 4 | **26** | **3x – e-x = 0** | 4 | **2** |
| **12** | **3 sin (x1/2) + x – 3 = 0** | 3 | 1 | **27** | **4(1+x1/2) ln(x)–10 = 0** | 1 | **3** |
| **13** | **0.1x2 – x ln(x) = 0** | 1 | 4 | **28** | **sin(x)–31/2cos(x)+4x–4 = 0** | 3 | **4** |
| **14** | **cos(1 + 0.2x2) – x = 0** | 1 | 3 | **29** | **x – 1 / (3 + sin(3.6x)) = 0** | 1 | **3** |
| **15** | **3 x – 4 ln(x) – 5 = 0** | 1 | 2 | **30** | **0.25x3 + cos(x / 4) = 0** | 4 | **2** |

В табл. 1-1 номера методов: **1** – половинное деление;**2** – итерации;**3** – Ньютона; **4** – хорд.

#### 1.4. Содержание отчета

1. Индивидуальное задание (уравнение, методы для выполнения 3-х итераций).
2. Результат отделения корней (график функции, таблица значений функции и её производных, вывод об отделённом отрезке, содержащем один корень).
3. Результаты исследования функции уравнения для проведения расчетов. ***Привести для каждого метода***:

* условие сходимости вычислительного процесса;
* начальное приближение;
* **условие окончания этапа уточнения корня.**

1. В сценарии мат. пакета создать функции для проведения расчета 1-м методом методами. Результаты расчета по каждому методу свести в табл. 1-2.

Таблица 1-2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **к** | **x** | **f(x)** |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |

1. Оценки погрешностей результатов расчетов после 3-х итераций с использованием формулы, соответствующего метода.
2. Создать программу для решения уравнения 2-м заданный методом с точностью 10-4. Произвести расчет, результаты решений свести в табл. 1-2.
3. Решение нелинейного уравнения с использованием функции **fsolve**.

#### 1.5. Пример выполнения задания с использованием мат. пакета MathCad

* Решить уравнение **;**
* методы решения нелинейных уравнений – половинного деления, итерации, Ньютона и хорд;

**Этап отделения корней**.

Используем для этого математический пакет MathCad. Отделение корней произведем как графическим методом (график функции), так и аналитически (таблица).

|  |
| --- |
|  |

Рис.1. Графическое и аналитическое отделение корней уравнения.

Из построенного графика функции f(x) видно, что на отрезке (0, 1) есть один корень. На этом графический способ отделения корней заканчивается.

Другой вариант отделения корня – решить задачу аналитически.

Для аналитического отделения корня построена таблица рис.1. Она требует пояснений. В столбцах таблицы выведены некоторые значения аргумента x на заданном отрезке, а также значения функций f(x), при этих значениях x.

Видно, что на отрезке (0, 1) функция f(x) меняет знак, значит *существует*, по крайней мере, один *корень*.

Значения первой производной *в заданных точках отрезка* (0, 1) не меняет знак, что вызывает некоторую надежду о том, что не меняет знак *на всем отрезке* (0, 1), но делать вывод об этом не совсем корректно с точки зрения математики. Однако анализ аналитического выражения = –sin(x)–3 приводит к выводу, что <= -2 при любых значениях x. А это значит, что отрицательно на всем отрезке (0, 1), и уже из этого следует, что *на отрезке (0, 1) функция f(x) монотонна* *и имеет один корень.*

Значения первой и второй производной на отрезке (0, 1) из таблицы рис.1 будут использованы в методах Ньютона, хорд и итераций.

**Этап уточнения корня**

**Метод половинного деления**

1. Исследование задания

* Метод половинного деления сходится, если на выбранном отрезке отделен один корень. Так как на отрезке [0;1] функция  меняет знак () и монотонна (f′(x)<0), то условие сходимости выполняется.
* Выберем за начальное приближение середину отрезка

 =0.5.

* Условие окончания процесса уточнения корня. Для оценки погрешности метода половинного деления справедливо условие

|bn – an|<ε , т.е. длина отрезка, полученного на n-ом шаге должна быть меньше заданной точности - 

1. Результаты «ручного расчета» трех итераций

|  |
| --- |
| 1 итерация  f(x0)=0.377    следовательно,  2 итерация  f(x1)=-0.5    следовательно,  3 итерация    f(x2)=-0.064    следовательно,  и т.д. |

Рис.2. Три итерации метода половинного деления

Результаты вычислений представлены в форме табл. 1-2а.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | an | bn | f(an) | f(bn) | (an+bn)/2 | f( (an+bn)/2) | bn-an |
| 0 | 0 | 1 | 2 | -1.459 | 0.5 | 0.377 | 1 |
| 1 | 0.5 | 1 | 0.377 | -1.459 | 0.75 | -0.518 | 0.5 |
| 2 | 0.5 | 0.75 | 0.377 | -0.518 | 0.625 | -0.064 | 0.25 |
| 3 | 0.5 | 0.625 |  |  |  |  | 0.125 |

После трех итераций приближение к корню – середина отрезка [a3, b3] – x3=0.5625.

Оценка погрешности результата после трех итераций: R = | b3 – a3 | = 0.125.

Это значит, что x3 отличается от неизвестного точного значения корня не больше чем на величину R = 0.125.

**Метод простых итераций**

**1) Исследование задания~~.~~**

* Приведем уравнение f(x)=0 к виду . Тогда рекуррентная формула  . Для сходимости процесса простых итерации необходимо, чтобы  при . Если  то сходимость не обеспечена.

Приведем уравнение  к виду x = (cos(x)+1)/3 и проведем исследование.

|  |
| --- |
|  |

В приведенном примере условие сходимости выполняется и можно использовать итерирующую/итерационную функцию  в рекуррентной формуле для уточнения корня методом итераций, что и будет показано ниже. Однако, в случаях, когда свободный х выразить не удается, или когда  целесообразно воспользоваться следующим приемом, позволяющим обеспечить выполнение условий сходимости.

Построим функцию ϕ(x) = х + λf(x), где параметр  может быть определен по правилу: λ = , а в *знаменатель следует подставить (x), у которого* то есть

λ =

Тогда рекуррентная формула: φ(x)= x + (1 - 3x + cos x)/3.841.

**2) «Ручной расчет» трех итераций**

Для получения решения уравнения методом итерации необходимо воспользоваться следующей рекуррентной формулой: ,

|  |
| --- |
|  |

Результаты вычислений представлены в форме табл. 1-2б.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **к** | **Xк** | **f(xк)** |
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0.667 | -0.214 |
| 2 | 0.595 | 0.042 |
| 3 | 0.609 | -7.95 • 10-3 |

Сходимость итерационного процесса подтверждается принадлежностью всех выбранному исходному отрезку изоляции корня [0;1] и стремлением f() к нулю.

Получим оценку погрешности результата после трех итераций:



**Метод хорд**

**1) Исследование задания**.

* Необходимые и достаточные условия сходимости аналогичны методу Ньютона, а именно:

непрерывна на [a;b] и ;

 и отличны от нуля и сохраняют знаки для .

В нашем случае на отрезке [0;1] требования сходимости выполняются.

На этапе отделения корня было показано, что для функции f(x)=1–3x+cosx вторая производная <0 на отрезке [0;1] и, следовательно, *неподвижной точкой является точка = b = 1*, так как .

Таким образом, полагая = a= 0, получим сходящуюся последовательность приближений к корню.

В рассматриваемой задаче рекуррентная формула принимает следующий вид

= +

* Оценку погрешности можно проводить по любой из формул  или , где m1 и M1 – наименьшее и наибольшее значения  на отрезке. В случае, если M1<m1 можно использовать правило останова 

2) Расчет трех итераций

Для получения решения уравнения методом хорд воспользуемся следующей рекуррентной формулой:

= 0.

|  |
| --- |
|  |

Результаты вычислений представлены в виде следующей таблицы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n | Xn | f(xn) |
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0.5781 | 0.10325 |
| 2 | 0.6059 | 4.0808 •10-3 |
| 3 | 0.60706 | 1.59047•10-4 |

3) Оценку погрешности результата, вычисленного методом хорд, получим по формуле   
 . Тогда после трех итераций

| - | <=

**Метод Ньютона**

**1) Исследование задания**.

* Необходимые и достаточные условия сходимости метода Ньютона:

непрерывна на [a;b] и ;

 и отличны от нуля и сохраняют знаки для .

В нашем случае на отрезке [0;1] требования сходимости выполняются.

* Начальное приближение  должно удовлетворять условию: , т.е. за начальное приближение следует принять тот конец отрезка, где знак функции и знак второй производной совпадают. Поскольку  < 0 и  < 0, то выберем начальное приближение к корню: =1.

2) Расчет трех итераций

Для получения решения уравнения методом Ньютона воспользуемся следующей рекуррентной формулой: 

В нашем случае , =1.

|  |
| --- |
|  |

Представим вычисления в виде следующей табл. 1-2б.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| k | Xk | f(xk) |
| 0 | 1 | -1.4597 |
| 1 | 0.62 | -0.046 |
| 2 | 0.607121 | -6. 788 •10-5 |
| 3 | 0.60710164814 | -1.484 •10-10 |

Оценим погрешность после трех итераций:



Сравните оценки погрешности методов после трех итераций. Представляется, что комментарии излишни.

#### Пример выполнения задания с использованием мат. пакета Scilab

**1. Задание для решения нелинейных уравнений:**

* уравнение ;
* метод, с использованием которого требуется провести 3 итерации по уточнению корня заданного уравнения. (***В примере рассматриваются все 4 метода: метод половинного деления, метод итераций, метод Ньютона, метод хорд***).

1. **Отделение корней**

|  |
| --- |
| --> function s=fi(x)  >deff('y=f(x)','y=1-3.\*x+cos(x)'); dy=numderivative(f, x); dy2=numderivative(f, x,2);  > s=[x,f(x),dy,dy2];  > end  --> p=zeros(6,4); x=0 : 0.2 : 1;  --> for i=1:6  > p(i,:)=fi(x(i));  > end  --> p  p =  0. 2. -3. -3.  0.2 1.38 -3.199 -3.09  0.4 0.721 -3.389 -3.177  0.6 0.025 -3.565 -3.257  0.8 -0.703 -3.717 -3.326  1. -1.46 -3.841 -3.383 |

**Вывод:** На концах отрезка [0;1] функция имеет противоположные знаки, а 1-я производная знакопостоянна, следовательно, на этом отрезке уравнение 1 - 3х + cos(x)=0 имеет единственный корень.

1. ***Уточнение корней***

***Метод половинного деления***

**1. Исследование задания**

Метод **половинного деления** сходится, если на выбранном отрезке отделен один корень. Так как на отрезке [0;1] функция меняет знак() и монотонна (f’(x)<0), то условие сходимости выполняется.

Начальным приближением является середина отрезка [0;1]:=0.5.

1. **Результаты расчет трех итераций.**

В сценарии пакета Scilab создать функцию, реализующую метод половинного деления, предусмотрев вывод данных, требуемый для заполнения следующей таблицы.

|  |
| --- |
| // Сценарий для проведения расчета 3-х итераций по методу  //половинного деления  **f**unction **ff**=f(**x**) //левая часть уравнения  **ff**=1-3\***x**+cos(**x**);  endfunction  // Расчет 3-х итераций по методу половинного деления  disp(' n a b f(a) f(b) c=(a+b)/2 f(c) b-a');  n=0; fa=f(a);fb=f(b);c=(a+b)/2; fc=f(c); z=[n,a,b,fa,fb,c,fc,b-a];  z  for n=1:3  if f(c)\*f(a)<0 then b=c; else a=c; end  fa=f(a);fb=f(b);c=(a+b)/2; fc=f(c); z=[n,a,b,fa,fb,c,fc,b-a];  z  c=(a+b)/2;  end  --> a=0;b=1;  --> exec('pol.sce',0);  n a b f(a) f(b) c=(a+b)/2 f(c) b-a  z =  0. 0. 1. 2. -1.4597 0.5 0.37758 0.5  z =  1. 0.5 1. 0.37758 -1.4597 0.75 -0.51831 0.25  z =  2. 0.5 0.75 0.37758 -0.51831 0.625 -0.06404 0.125  z =  3. 0.5 0.625 0.37758 -0.06404 0.5625 0.15842 0.0625 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **a** | **b** | **f(a)** | **f(b)** | **(a+b)/2** | **f( (a+b)/2)** | **b-a** |
| 0 | 0 | 1 | 2 | -1.459 | 0.5 | 0.377 | 0.5 |
| 1 | 0.5 | 1 | 0.377 | -1.459 | 0.75 | -0.518 | 0.25 |
| 2 | 0.5 | 0.75 | 0.377 | -0.518 | 0.625 | -0.064 | 0.125 |
| 3 | 0.5 | 0.625 | 0.377 | -0.064 | 0.563 | 0.158 | 0.063 |

После трех итераций приближение к корню x3=0.563.

1. **Погрешность численного решения нелинейных уравнений**

Оценим погрешность результата, полученного после 3-х итераций .

***Метод итераций***

**1. Исследование задания**

Приведем уравнение f(x)=0 к виду . Тогда рекуррентная формула . Для сходимости процесса итерации необходимо, чтобы при**.** Если  то сходимость не обеспечена.

В случае, когда х выразить не удается, целесообразно воспользоваться следующим приемом, позволяющим обеспечить выполнение условий сходимости.

Построим функцию где параметр  может быть определен по правилу: если то  если  то  где .

Приведем уравнение f(x)=0 к виду x = (cos(x)+1)/3 и выполним исследование.

|  |
| --- |
| // Проверка сходимости метода итераций  x=0:0.2:0.6;  functions=ffi(x) // формирование строки таблицы  deff('y=fi(x)','y=(1+cos(x))/3'); dfi=numderivative(fi, x);  s=[x; dfi];  end  p=zeros(4,2); x=0 : 0.2 : 0.6;  for i=1:4  p(i,:)=ffi(x(i));  end  p  exec(‘pr\_sch.sce’,0);  p =  0. 0.  0.2 -0.066  0.4 -0.13  0.6 -0.188 |

**Вывод**: условие сходимости метода итераций выполняется, поскольку на всем отрезке [a;b] . Выберем например, начальное значение, x0=0 (в методе итераций x0– произвольное значение, принадлежащее отрезку [a;b]**),** и с использованием итерационной функции выполним три итерации.

**2. Расчет трех итераций.**

В сценарии пакета Scilab создать функцию, реализующую метод итераций, предусмотрев вывод данных, требуемый для заполнения следующей таблицы.

|  |
| --- |
| // Метод итераций  functionff=f(x) //левая часть уравнения  ff=1-3\*x+cos(x);  endfunction  function ff=fi(x) //итерирующаяфункция  ff=(cos(x)+1)/3;  endfunction  // Расчет 3-х итераций по методу итераций  disp(' n x f(x)')  n=0; x=0; fx=f(x); z=[n,x,fx];  z  for n=1:3  x=fi(x); fx=f(x); z=[n,x,fx]  end  --> x=0;  --> exec('iter.sce',0);  n x f(x)  z =  0. 0. 2.  z =  1. 0.66667 -0.21411  z =  2. 0.5953 0.0421  z =  3. 0.60933 -0.00795 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **n** | **Xn** | **f(xn)** |
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0.6667 | -0.2141 |
| 2 | 0.5953 | 4.21 • 10-2 |
| 3 | 0.6093 | -7.9496• 10-3 |

**3. Погрешность численного решения нелинейных уравнений**

Погрешность результата, вычисленного методом итерации, можно оценить с помощью

выражения (q==0.188):

0.0032

***Метод Ньютона***

**1*.* Исследование задания**

Из условия для уравнения 1- 3х + cos(x) = 0, где , а  выберем начальное приближение к корню: .

Для получения решения уравнения методом Ньютона воспользуемся следующей рекуррентной формулой: 

В нашем случае 

1. **Расчет трех итераций**

В сценарии пакета Scilab создать функцию, реализующую метод итераций, предусмотрев вывод данных, требуемый для заполнения следующей таблицы.

|  |
| --- |
| // Метод Ньютона  **f**unction ff=f(x) //левая часть уравнения  ff=1-3\*x+cos(x);  endfunction  function ff=f1(x) // первая производная от f(x)  ff=-3-sin(x);  endfunction  // Расчет 3-х итераций по методу итераций  disp(' n x f(x)')  n=0; x=0; fx=f(x); z=[n,x,fx];  z  for n=1:3  x=x-f(x)/f1(x); fx=f(x); z=[n,x,fx]  end  --> x=0;  --> exec('nuton.sce',0);  n x f(x)  z =  0. 0. 2.  z =  1. 0.66667 -0.21411  z =  2. 0.60749 -0.0014  z =  3. 0.6071 -6.3D-08 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **k** | **Xk** | **f(xk)** |
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0.62001 | -0.21411 |
| 2 | 0.60712 | -0. 0014 |
| 3 | 0.60710 | -6.3 •10-8 |

1. **Погрешность численного решения нелинейных уравнений**

Оценим погрешность после трех итераций по формуле:

 , где 

***Метод хорд***

**1. Исследование задания**

***Проверка выполнения условий сходимости***. Для сходимости метода необходимо знакопостоянство на отрезке [a;b].

***Выбор начального приближения.*** Вид рекуррентной формулы зависит от того, какая из точек a или b является неподвижной. Неподвижен тот конец отрезка [a;b**]** , для которого знак функции f(x**)**совпадает со знаком ее второй производной. Тогда второй конец отрезка можно принять за начальное приближение к корню, то есть точку х0**.**

Рекуррентная формула метода хорд в [1]:

 где  - неподвижная точка.

Выше было показано, что для функции f(x)=1–3x+cosx <0 на отрезке [0;1]неподвижной точкой является точка x=b=1, так как f(1)>0.

Таким образом, полагая **x0=a=0**, получим сходящуюся последовательность приближений к корню.

В рассматриваемой задаче рекуррентная формула принимает следующий вид



**2. Расчет трех итераций**

Для получения решения уравнения методом хорд воспользуемся следующей рекуррентной формулой:

****

В сценарии пакета Scilab создать функцию, реализующую метод итераций, предусмотрев вывод данных, требуемый для заполнения следующей таблицы.

|  |
| --- |
| // Метод хорд  functionff=f(x) //Левая часть уравнения  ff=1-3\*x+cos(x);  endfunction  // Расчет 3-х итераций по методу итераций  disp(' n x f(x)')  n=0; x=0; fx=f(x); z=[n,x,fx];  z  for n=1:3  x=x-f(x)/(f(xx)-f(x))\*(xx-x); fx=f(x); z=[n,x,fx]  end  --> xx=1;  --> exec('xord.sce',0);  n x f(x)  z =  0. 0. 2.  z =  1. 0.57809 0.10325  z =  2. 0.60596 0.00408  z =  3. 0.60706 0.00016 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **n** | **Xn** | **f(xn)** |
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0.5781 | 0.10325 |
| 2 | 0.6441 | 0.00408 |
| 3 | 0.6070 | 0.00016 |

1. **Погрешность численного решения нелинейных уравнений**

Оценим погрешность после трех итераций по формуле:



1. **Решение нелинейного уравнения с использованием функции пакета Scilab**fsolve

|  |
| --- |
| -->deff('y=f(x)','y=1-3\*x+cos(x)');  --> [x,fx]=fsolve(0,f)  fx =  1.110D-16  x =  0.6071016 |

### Контрольные вопросы по теме «Методы решения нелинейных уравнений»

**1.**Что является корнем нелинейного уравнения f(x)=0?

**2.**Чему равна функция в точке корня?

**3.**Каково условие существования на отрезке [a;b] хотя бы одного корня?

**4.**При каких условиях корень xбудет единственным  на отрезке [a;b]?

**5.**Из каких этапов состоит процесс решения нелинейного уравнения?

**6.**В чем заключается этап «отделения корней» нелинейного уравнения?

**7.** Какие методы используются на этапе отделения корней?

**8.**Что необходимо, чтобы выбрать **x0** в качестве начального приближения в методеНьютона?

**9.**Какой метод решения нелинейного уравнения требует  более близкого к корнюначального значения?

**10.** Какой методпредставляет собой метод решения нелинейного уравнения, в результате которого получается последовательность вложенных отрезков?

**11.** Можно ли уточнить корень уравнения графическим методом?

**12.**Что является  первым приближением к корню, отделенному на отрезке [a;b],при решении нелинейного уравнения методом половинного деления?

**13.** Каково правило выбора итерирующей функции при использовании метода итераций?

**14.** Что принимается за начальное приближение в методе итерации?

**15.** Каково правило выбора неподвижной точки при использовании метода хорд?

**16.** Какое значение выбирается в качестве начального приближения в методе хорд?

**17.** Для каких функций не рекомендуется применять метод Ньютона?

**18.**Можно ли применять метод итераций, если на заданном отрезке имеются два корня?

**19.** Какой метод решения нелинейного уравнения обладает свойством «самокоррекции»?

**20.** Что относится к способам улучшения сходимости метода простой итерации?

**Лабораторная работа №2**

### по теме *«Интерполяция функций»*

#### Вопросы, подлежащие изучению

1. Постановка задачи аппроксимации и интерполяции. Интерполяция в точке. Погрешность интерполяции.
2. Основные понятия: интерполирующая и интерполируемая функции, условие интерполяции. Связь между числом узлов интерполяции и порядком интерполирующего полинома.
3. Интерполяционный полином Лагранжа: назначение, область применения.
4. Конечные разности, их назначение и использование. Свойства конечных разностей
5. Интерполяционная формула Ньютона, область применения.
6. Методика выбора узлов интерполяции при использовании формул Лагранжа и Ньютона в задаче интерполяции в точке.
7. Способы оценки погрешностей интерполяции по формулам Лагранжа и Ньютона. Способы повышения точности интерполяции.
   1. **Задание**
   2. **Выбрать** из таблицы 1–1 **индивидуальное задание** для интерполяции:

* точку интерполяции **x=a** для интерполяции полиномом **Ньютона**;
* точку интерполяции **x=b** для интерполяции полиномом **Лагранжа**;
  1. **Выполнить вручную** интерполяцию в заданной точке **x=a с использованием** полином**а Ньютона 1**–й, **2**–й и **3**–й степени:
* **выбрать** из таблицы 1–2 с интерполируемой функцией **четыре подходящих узла. Перенумеровать узлы и** з**анести** перенумерованные **узлы** в таблицы вида 1–3.
* **заполнить таблицу конечных разностей** (для интерполяционной формулы Ньютона);
* **записать** интерполяционные **формулы** для 1, 2 и 3-ей степени полинома;
* **выполнить расчеты** по интерполяционным формулам для каждой степени полинома; все **промежуточные** вычисления производить с сохранением всех значащих цифр, **окончательные** результаты округлять до **4** знаков после десятичной точки.
* **занести** полученные **результаты в таблицу** вида 1–4;
* **вычислить оценки погрешности в точке а** для полиномов различных степеней **и занести их в таблицу 1-4.**
  1. **Выполнить вручную** интерполяцию в заданной точке **x=b с использованием** полином**а Лагранжа 1**–й, **2**–й b**3**–й степени:
* **выбрать** из таблицы 2–2 с интерполируемой функцией **четыре подходящих узла. Перенумеровать узлы и** з**анести** перенумерованные **узлы** в таблицы вида 1–3.
* **записать** интерполяционные **формулы** для 1, 2 и 3-ей степени полинома;
* **выполнить расчеты** по интерполяционным формулам для каждой степени полинома; все **промежуточные** вычисления производить с сохранением всех значащих цифр, **окончательные** результаты округлять до **4** знаков после десятичной точки.
* **занести** полученные **результаты в таблицу** вида 1–4;
* **вычислить оценки погрешности в точке b** для полиномов различных степеней **и занести их в таблицу 1-5.**
  1. **Объяснить** полученные **результаты** и **сделать выводы**.

#### 2.3. Варианты задания для ручного расчета и таблица интерполируемой функции

Таблица 1–1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №  варианта | Полином Ньютона  **x=a** | Полином Лагранжа  **x=b** |
| 1 | 0.06 | 0.43 |
| 2 | 0.11 | 0.72 |
| 3 | 0.16 | 1.17 |
| 4 | 0.21 | 0.58 |
| 5 | 0.31 | 0.12 |
| 6 | 0.36 | 1.21 |
| 7 | 0.41 | 1.46 |
| 8 | 0.46 | 0.87 |
| 9 | 0.51 | 0.48 |
| 10 | 0.61 | 1.37 |
| 11 | 0.07 | 0.51 |
| 12 | 0.12 | 0.96 |
| 13 | 0.17 | 0.64 |
| 14 | 0.22 | 1.52 |
| 15 | 0.32 | 0.77 |
| 16 | 0.37 | 0.17 |
| 17 | 0.42 | 1.02 |
| 18 | 0.52 | 0.34 |
| 19 | 0.62 | 1.41 |
| 20 | 0.08 | 0.23 |
| 21 | 0.13 | 0.67 |
| 22 | 0.17 | 1.29 |
| 23 | 0.23 | 0.81 |
| 24 | 0.32 | 1.26 |
| 25 | 0.42 | 1.12 |
| 26 | 0.47 | 0.93 |
| 27 | 0.53 | 0.37 |
| 28 | 0.63 | 0.26 |
| 29 | 0.09 | 1.07 |
| 30 | 0.14 | 1.33 |

Таблица 1–2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ узла** | **Значение аргумента xi** | **Значение функцииyi** |
| **0** | 0.05 | -4.1710 |
| **1** | 0.10 | -4.1330 |
| **2** | 0.15 | -4.0845 |
| **3** | 0.20 | -4.0240 |
| **4** | 0.25 | -3.9500 |
| **5** | 0.30 | -3.8610 |
| **6** | 0.35 | -3.7555 |
| **7** | 0.40 | -3.6320 |
| **8** | 0.45 | -3.4890 |
| **9** | 0.50 | -3.3250 |
| **10** | 0.55 | -3.1385 |
| **11** | 0.60 | -2.9280 |
| **12** | 0.65 | -2.6920 |
| **13** | 0.70 | -2.4290 |
| **14** | 0.75 | -2.1375 |
| **15** | 0.80 | -1.8160 |
| **16** | 0.85 | -1.4630 |
| **17** | 0.90 | -1.0770 |
| **18** | 0.95 | -0.6565 |
| **19** | 1.00 | -0.2000 |
| **20** | 1.05 | 0.2940 |
| **21** | 1.10 | 0.8270 |
| **22** | 1.15 | 1.4005 |
| **23** | 1.20 | 2.0160 |
| **24** | 1.25 | 2.6750 |
| **25** | 1.30 | 3.3790 |
| **26** | 1.35 | 4.1295 |
| **27** | 1.40 | 4.9280 |
| **28** | 1.45 | 5.7760 |
| **29** | 1.50 | 6.6750 |
| **30** | 1.55 | 7.6265 |

#### 2.4. Формы таблиц для занесения результатов

Таблица 1–3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | 0 | 1 | 2 | … | n |
| xk | x0 | x1 | x2 | … | xn |
| yk | y0 | y1 | y2 | … | yn |

Таблица 1–4

(для полинома Ньютона)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Степень многочлена k | Pk(x) | Погрешность |
| 1 | P1(x) | |P1(x) – P2(x)| |
| 2 | P2(x) | |P2(x) – P3(x)| |
| 3 | P3(x) | – |

Таблица 1-5

(для полинома Лагранжа)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Степень многочлена k | Lk(x) | Погрешность |
| 1 | L1(x) | |L1(x) – L2(x)| |
| 2 | L2(x) | |L2(x) – L3(x)| |
| 3 | L3(x) | – |

#### 2.5. Содержание отчета

1. Фамилия и имя студента, номер группы.

2. Название и цель лабораторной работы.

3. Индивидуальный вариант задания к работе.

4. Таблицы 1–3 с перенумерованными узлами интерполяции.

5. Интерполяционные формулы для ручных расчетов и результаты расчетов в таблицах 1–4 и 1-5.

6. Схема алгоритма и программа.

7. Выводы.

#### 2.6. Пример выполнения задания

* 1. **Точка интерполяции для формулы Ньютона a = 0.12.**

**Выбор и нумерация узлов.**

Для ручной интерполяции в точке x = a = 0.12 по 1 формуле Ньютона выбираем 4 узла из таблицы 1–2 так, чтобы точка a = 0.12 оказалась между узлами с номерами с 1 по 2 и добавляем узлы вправо:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Номера выбранных узлов (k)** | xk | yk |
| **1** | 0.10 | -4.1330 |
| **2** | 0.15 | -4.0845 |
| **3** | 0.20 | -4.0240 |
| **4** | 0.25 | -3.9500 |

Выбор точек определяется тем, чтобы при решении задачи интерполяции в точке по первой формуле Ньютона, точка должна быть внутри таблицы для полинома любой степени, в том числе и первой. Поэтому нулевой и первый узел должны находиться по разные стороны от самой точки **x=a**. Если **нулевой узел находится слева от точки**, а первый узел находится справа от точки, то шаг **h=x1-x0 будетположительным** и **добавлять узлы следует справа** относительно точки **x=a**. Если же нулевой узел находиться справа от точки, а первый узел находиться слева, то шаг **h=x1-x0 будет отрицательным, и добавлять узлы следует слева.**

Изменим нумерацию узлом интерполяции для использования их в интерполяционных формулах и занесем в таблицы вида 1–3.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| k | 0 | 1 | 2 | 3 |
| xk | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 |
| yk | -4.1330 | -4.0845 | -4.0240 | -3.9500 |

**Ручной расчет по 1–й формуле Ньютона.**

Заполним таблицу конечных разностей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **Δy** | **Δ2y** | **Δ3y** |
| 0.10 | -4.1330 | 0.0485 | 0.0120 | 0.0015 |
| 0.15 | -4.0845 | 0.0605 | 0.0135 |  |
| 0.20 | -4.0240 | 0.0740 |  |  |
| 0.25 | -3.9500 |  |  |  |

Запишем 1–ю интерполяционную формулу Ньютона



для полиномов 1–й, 2–й и 3–й степени и выполним расчеты по ним. Определим значение q:



Значение полинома 1-й степени в т. x=0.12:



Значение полинома 2-й степени в т. x=0.12:



Значение полинома 3-й степени в т. x=0.12:

**Важно:** Явные выражения для полиномов 1, 2 и 3 степени могут быть получены после соответствующих преобразований формулы:



В нашем случае они будут иметь вид:



Занесем результаты в таблицу и вычислим оценки погрешности полученных значений для полиномов 1–й и 2–й степени:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Степень многочленаk | Pk(x) | Оценка погрешности |
| 1 | –4.1136 | 0.0014 |
| 2 | –4.1150 | 0.0001 |
| 3 | –4.1149 | – |

**Вывод.** Получены выражения для интерполяционных многочленов 1, 2 и 3-ей степени и их значения в точке **а**. Оценку погрешности проведём в соответствии с неравенством:



Можно утверждать, что разность между точным (неизвестным) значением функции и значением интерполяционного полинома в точке x=0.12 после 3-х итераций не превышает 0.0001.

1. **Точка интерполяции для формулы Лагранжа b = 0.52.**

**Выбор и перенумерация узлов.**

Для ручной интерполяции в точке **x = b = 0.52** по формуле Лагранжа выбираем из таблицы 3–2 4 узла так, чтобы точка **b = 0.52** оказалась внутри получающийся таблицы и узлы были наиболее близкими к этой точке. В итоге выбираем узлы с номерами 9, 10, 8, 11:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **8** | 0.45 | -3.4890 |
| **9** | 0.50 | -3.3250 |
| **10** | 0.55 | -3.1385 |
| **11** | 0.60 | -2.9280 |

Следует отметить, что формула Лагранжа может использоваться как для таблиц с постоянным шагом, так и с непостоянным шагом. **Перенумеруем узлы** интерполяции руководствуясь двумя правилами: точка x=b должна быть внутри таблицы и узлы должны быть ближайшие к ней. Занесем перенумерованные узлы в таблицу вида 2–3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| k | 0 | 1 | 2 | 3 |
| xk | 0.50 | 0.55 | 0.45 | 0.60 |
| yk | -3.3250 | -3.1385 | -3.4890 | -2.9280 |

**Ручной расчет по формуле Лагранжа.**

Запишем интерполяционные полиномы Лагранжа 1–й, 2–й и 3–й степени и вычислим их значения в точке **x = b = 0.52**:







**Обратите внимание, что:** выражения для полиномов 1, 2 и 3 степени (в явном виде) после соответствующих преобразований следует получить самостоятельно!

Занесем результаты в таблицу и вычислим оценки погрешности полученных значений для многочленов 1–й и 2–й степени:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Степень многочленаk | Lk(x) | Оценка погрешности |
| 1 | –3.2504 | 0.0027 |
| 2 | –3.2531 | 0.0001 |
| 3 | –3.2532 | – |

**Вывод**. Получены выражения для интерполяционных полиномов 1, 2 и 3-ей степени и их значения в т. b. Оценку погрешности проведём в соответствии с неравенством:



Можно утверждать, что разность между точным (неизвестным) значением функции и значением интерполяционного полинома в точке x=0.52 после 3=х итераций не превышает 0.0001.

Здесь будет пример на MathCad-e

#### 2.7. Решение задачи интерполяции с использованием средств пакета Scilab.

|  |
| --- |
| // Линейная интерполяция. 1-я формула Ньютона.  x=[0.10 0.15]; y=[-4.1330 -4.0845]; z=[x;y]; a=[0;0];  function [zr]=R(a,z)  zr=z(2)-a(1)-a(2)\*z(1)  endfunction  disp(‘Линейнаяинтерполяция’);  a=datafit(R,z,a)  deff('y=i1(x)','y=-4.2300002+0.9700013\*x');  i1(0.12)  //Квадратичнаяинтерполяция  x=[0.10 0.15 0.20]; y=[-4.1330 -4.0845 -4.0240]; z=[x;y]; a=[0;0;0];  function [zr2]=R(a,z)  zr2=z(2)-a(1)-a(2)\*z(1)-a(3)\*z(1)^2  endfunction  disp(‘Квадратичнаяинтерполяция’);  a=datafit(R,z,a)  deff('y=i2(x)','y=-4.1940017+0.3700235\*x+2.3999234\*x^2');  i2(0.12)  //Кубическаяинтерполяция  x=[0.10 0.15 0.20 0.25]; y=[-4.1330 -4.0845 -4.02430 -3.9500]; z=[x;y]; a=[0;0;0;0];  function [zr3]=R(a,z)  zr3=z(2)-a(1)-a(2)\*z(1)-a(3)\*z(1)^2-a(4)\*z(1)^3  endfunction  disp(‘Кубическаяинтерполяция’);  a=datafit(R,z,a)  deff('y=i3(x)','y=-4.2045114+0.5932161\*x+0.8987173\*x^2+3.202404\*x^3');  i3(0.12)  // Интерполяция в точке  -->exec(‘int\_x.sce’,0);  Линейная интерполяция  a =  -4.2300002  0.9700013  ans =  -4.1136  Квадратичная интерполяция  a =  -4.1940017  0.3700235  2.3999234  ans =  -4.11504  Кубическая интерполяция  a =  -4.2045114  0.5932161  0.8987173  3.202404  ans =  -4.1148502 |

**Вывод.** Полученные выражения полиномов 1, 2 и 3-ей степени, а также их значения в заданной точкеa=0.12 совпадают до **4** знака после десятичной точки с ручным расчетом.

#### 2.8. Контрольные вопросы по теме

#### «Интерполяция функций»

1. Что называется задачей интерполяции и задачей аппроксимации?
2. Что называется узлами и шагом интерполяции?
3. Что такое интерполируемая функция и интерполирующая функция?
4. Существует ли связь между числом узлов интерполяции и степенью интерполяционного полинома?
5. Можно ли, используя одни и те же узлы интерполяции, построить несколько интерполяционных полиномов?
6. Сколько интерполяционных полиномов степени n существует, если функция задана (n + 1**)** узлом?
7. Изменится ли точность интерполяции при увеличении или уменьшении количества узлов?
8. Как изменится формула Лагранжа при добавлении в таблицу значений функции еще одного узла?
9. Как изменится формула Ньютона при добавлении в таблицу значений функции еще одного узла?
10. Если интерполируемая функция f(x)задана в (n + 1**)** равноотстоящих узлах, то для ее интерполяции удобнее использовать формулу Ньютона или формулу Лагранжа?
11. Можно ли при использовании формулы Лагранжа располагать узлы интерполяции в произвольном порядке?
12. Можно ли при использовании формулы Ньютона располагать узлы интерполяции в произвольном порядке?
13. Потребуется ли полный пересчет коэффициентов формулы Лагранжа при добавлении дополнительного узла интерполяции?
14. В чем заключается универсальность формулы Лагранжа?
15. От чего зависит точность интерполяции?
16. Что такое «конечные разности»?
17. Чему равен порядок конечной разности наивысшего порядка, полученный по n исходным точкам?
18. Что происходит с формулой Ньютона при добавлении очередного узла интерполяции?
19. Чем отличаются результаты интерполяции, если при построении интерполяционных полиномов по формулам Лагранжа и Ньютона были использованы одни и те же узлы?
20. Чему равна степень интерполяционного полинома Ньютона при трех заданных точках интерполируемой функции?

## Лабораторная работа 3. «Аппроксимация функций.

## Метод наименьших квадратов»

### 3.1. Вопросы, подлежащие изучению

1. Постановка задачи аппроксимации.
2. Основные понятия: базисные функции, матрица Грамма, система нормальных уравнений, критерий аппроксимации.
3. Матрица Грамма для степенного базиса.
4. Правило построения системы нормальных уравнений и число уравнений в системе.
5. Алгоритм получения коэффициентов линейных и квадратичных аппроксимирующих функций.
6. Графическая иллюстрация метода МНК.
7. Формулы оценки качества аппроксимации.

### 3.2. Задание

* **Выбрать индивидуальное задание** из табл. 2-1 и табл. 2-2 для решения задачи аппроксимации методом наименьших квадратов**:** значения функции табл. 2-2 в узлах, указанных в табл. 2-1.

1. **Выполнить линейную аппроксимацию**:

* составить систему нормальных уравнений и решить её;
* вычислить значения аппроксимирующих функций в узловых точках и сравнить их со значениями исходной функции;
* Вычислить среднеквадратичную погрешность (СКО).

1. С использованием математического пакета **получить аппрокси-мирующие полиномы МНК 1, 2, 3, 4, 5 степеней и соответствующие СКО**. Построить графики полученных полиномов.
2. **Проанализировать результаты**.

### 3.3. Варианты задания

Таблица 2-1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **N варианта** | **Функция из табл. 1-2** | **Номера узлов из табл. 1-2** |
| 1 |  | 1,35,7,9,11,13 |
| 2 |  | 2,4,6,8,10,12,14 |
| 3 |  | 4,6,8,10,12,14 |
| 4 |  | 5,7,9,11,13,15 |
| 5 |  | 7,8,9,10,11,12,13 |
| 6 |  | 3,5,7,9,11,13,15 |
| 7 |  | 9,11,13,15,17,19 |
| 8 |  | 10,12,14,16,18,20 |
| 9 |  | 15,17,19,21,23,25 |
| 10 |  | 16,18,20,22,24,26 |
| 11 |  | 17,19,21,23,25,27 |
| 12 |  | 21,23,25,27,29,31 |
| 13 |  | 22,24,26,28,30,32 |
| 14 |  | 27,29,31,33,35 |
| 15 |  | 28,29,30,31,32,33 |
| 16 |  | 28,30,32,34,36 |
| 17 |  | 1,3,5,7,9,11 |
| 18 |  | 2,4,6,8,10,12 |
| 19 |  | 3,5,7,9,11,13 |
| 20 |  | 4,6,8,10,12,14 |
| 21 |  | 5,7,9,11,13,15 |
| 22 |  | 10,12,14,16,18,20 |
| 23 |  | 11,12,13,14,15,16,17 |
| 24 |  | 15,17,19,21,23,25 |
| 25 |  | 16,18,20,22,24,26 |
| 26 |  | 19,21,23,25,27,29 |
| 27 |  | 21,23,25,27,29,31 |
| 28 |  | 24,25,26,27,28,29,30 |
| 29 |  | 26,28,30,32,34,36 |
| 30 |  | 25,27,29,31,33,35 |

Таблица 1-2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **-номер узла** |  |  |  |
| 1 | -1.5 | -1,15 | 1,25 |
| 2 | -1.4 | -0,506 | 1,594 |
| 3 | -1.3 | 0,236 | 2,056 |
| 4 | -1.2 | 0,88 | 2,44 |
| 5 | -1.1 | 1,256 | 2,577 |
| 6 | -1.0 | 1,266 | 2,366 |
| 7 | -0.9 | 0,91 | 1,81 |
| 8 | -0.8 | 0,286 | 1,006 |
| 9 | -0.7 | -0,436 | 0,124 |
| 10 | -0.6 | -1,06 | -0,64 |
| 11 | -0.5 | -1,416 | -1,116 |
| 12 | -0.4 | -1,406 | -1,206 |
| 13 | -0.3 | -1,03 | -0,91 |
| 14 | -0.2 | -0,386 | -0,326 |
| 15 | -0.1 | -0,356 | 0,376 |
| 16 | 0.0 | 1 | 1 |
| 17 | 0.1 | 1,376 | 1,376 |
| 18 | 0.2 | 1,386 | 1,406 |
| 19 | 0.3 | 1,03 | 1,09 |
| 20 | 0.4 | 0,406 | 0,526 |
| 21 | 0.5 | -0,316 | -0,116 |
| 22 | 0.6 | -0,939 | -0,64 |
| 23 | 0.7 | -1,296 | -0,876 |
| 24 | 0.8 | -1,286 | -0,726 |
| 25 | 0.9 | -0,91 | -0,19 |
| 26 | 1.0 | -0,266 | 0,634 |
| 27 | 1.1 | 0,476 | 1,576 |
| 28 | 1.2 | 1,12 | 2,44 |
| 29 | 1.3 | 1,496 | 3,056 |
| 30 | 1.4 | 1,506 | 3,326 |
| 31 | 1.5 | 1,15 | 3,25 |
| 32 | 1.6 | 0,526 | 2,926 |
| 33 | 1.7 | -0,196 | 2,524 |
| 34 | 1.8 | -0,82 | 2,24 |
| 35 | 1.9 | -1,176 | 2,244 |
| 36 | 2.0 | -1,66 | 2,634 |

### 3.4. Содержание отчета

1. Индивидуальное задание.
2. Линейная аппроксимация:

* значения элементов матрицы Грамма и столбцов свободных членов, представленные в табл. 2-3:

Таблица 1-3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 0 |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

* системы нормальных уравнений и их решения, аппроксимирующие функции;
* исходная функция и результаты аппроксимации  в узловых точках, представленные в табл. 2-4:

Таблица 2-4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

* оценка погрешности (среднеквадратическое отклонение).

1. Аппроксимация с помощью математического пакета.

### 3.5. Пример выполнения задания

* 1. **Задание для решения задачи аппроксимации**

Для решения задачи аппроксимации методом наименьших квадратов выберем функцию y(x), заданную следующей таблицей:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 |
|  | 0.634 | 2.44 | 3.326 | 2.926 | 2.24 | 2.634 |

* 1. **Линейная аппроксимация:**

Вычислить и записать в табл. 1-3 элементы матрицы Грамма и столбец свободных членов:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 0 | 1.0 | 0.634 | 0.634 | 1 |
| 1 | 1.2 | 2.44 | 2.928 | 1.44 |
| 2 | 1.4 | 3.326 | 4.6564 | 1.96 |
| 3 | 1.6 | 2.926 | 4.6816 | 2.56 |
| 4 | 1.8 | 2.24 | 4.032 | 3.24 |
| 5 | 2.0 | 2.634 | 5.268 | 4 |
|  | 9 | 14.2 | 22.2 | 10.2 |

составить системы нормальных уравнений:

для линейной функции **P1(x) = А0+А1\*x** система нормальных уравнений примет вид (линейная аппроксимация):

**6\*А0+9\*А1 = 14.2**

**9\*А0+10.2\*А1 = 22.2**

решить систему уравнений:

получим коэффициенты **А0 = 0.438** и **А1 = 1.286**, тогда полином первой степени будет таким:

**P1(x) = 0.438+1.286\*x**

* 1. **Аппроксимация с помощью математического пакета.**

Для решения задачи аппроксимации с использованием математического пакета Scilab необходимо иметь функции и сценарий, (исходные коды находятся с п 1.7). **Их следует сохранить в одноименных файлах \*.sce.**

Далее в командном окне надо ввести свои начальные данные и запустить на выполнение сценарий **PrimerMNK.sce**.

--> x=[1.0,1.2,1.4,1.6,1.8,2.0];

--> y=[0.634,2.44,3.326,2.926,2.24,2.634];

--> exec("PrimerMNK.sce");

В сценарии **PrimerMNK**, по массивам **x** и **y** с исходными данными, получаются коэффициенты полиномов первой ( **А0**, **А1** ), второй ( **А0**, **А1**, **А2**), третьей, четвертой и пятой степени по МНК и вычисляются соответствующие СКО.

Результаты иллюстрируются графически.

a1 = 0.4380954 1.2857142

sko1 = 4.227766

a2 = -12.274286 19.162501 -5.9589288

sko2 = 1.3263692

a3 = -58.496675 117.68599 -73.667485 15.046344

sko3 = 0.1412967

a4 = 42.082002 -168.40057 224.66176 -120.26509 22.551922

sko4 = 0.0056225

a5 = -1.4523149 -15.298543 12.784469 24.059302 -25.872325 6.4072622

sko5 = 0.0087605

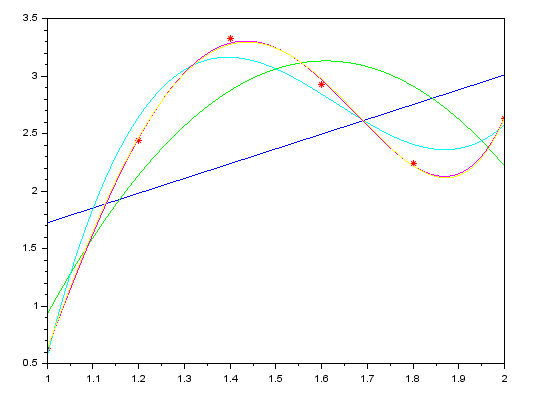


Рис. 2.1. Исходные данные и полиномы различных степеней, построенные по МНК.

### 3.6. Контрольные вопросы по теме

### «Аппроксимация функций.

### Метод наименьших квадратов»

1. Что называется аппроксимацией функций?
2. Как называется функция, приближенно описывающая таблично заданную функцию?
3. Как называется полином, построенный по таблично заданной функции и обеспечивающий полное совпадение в используемых для его построения точках?
4. Какое минимальное количество узлов нужно для построения аппроксимирующего многочлена 2-й степени?
5. Каким полиномом проводится аппроксимация, если система нормальных уравнений содержит два уравнения?
6. Каким полиномом проводится аппроксимация, если система нормальных уравнений содержит три уравнения?
7. Для чего предназначен метод наименьших квадратов?
8. Как изменяется точность описания исходной функции аппроксимирующим многочленом, если увеличить число табличных значений функции?
9. Что служит критерием близости аппроксимируемой и аппроксимирующей функций при использовании метода наименьших квадратов?
10. Что показывает критерий аппроксимации?
11. Какой термин используется при решении задачи аппроксимации?
12. Можно ли аппроксимировать функцию, заданную таблицей из 20 точек, многочленом 2-й степени?
13. Из какого условия в методе наименьших квадратов определяются параметры аппроксимирующей функции?
14. Что происходит с точностью аппроксимации с увеличением количества узлов аппроксимации?
15. Когда используется метод наименьших квадратов для построения аппроксимирующей функции?
16. Что служит мерой погрешности аппроксимации в точке?
17. Как называется матрица системы нормальных уравнений?
18. Как выбирается степень аппроксимирующего полинома (m**)** в методе наименьших квадратов в соответствии с количеством узлов таблично заданной функции- (n)?
19. Чем являются элементы матрицы Грамма?
20. Когда система нормальных уравнений имеет единственное решение?

### 3.7 Исходные тексты сценариев

|  |
| --- |
| // вычисляет значения полинома с коэффициентами a на массиве x  function[**pol**]=polyval(**x**, **a**);  **pol**=0;  for i=1:1:length(**a**);  **pol**=**pol**+**a**(i)\***x**.^(i-1);  end;  endfunction;  //вычисляет массив разностей полинома c набором коэффициентов a на //массиве данных z  function[**zr**]=R(**a**, **z**);  pol=0;  for i=1:1:length(**a**);  pol=pol+**a**(i)\***z**(1).^(i-1);  end;  **zr**=**z**(2)-pol;  endfunction;  //Вычисляет набор коэффициентов полинома МНК s по массивам данных x, y  // err - ошибка аппроксимации  function[**s**, **err**]=MNK(**x**, **y**, **a**);  z=[**x**;**y**];  exec("R.sce");  [**s**,**err**]=datafit(R,z,**a**);  endfunction;  //вычисляет СКО полинома с набором коэффициентов a на массивах данных x и y  function[**err1**]=SKO(**x**, **y**, **a**);  err=0;  exec("polyval.sce");  fori=1:1:length(**x**);  err=err+(**y**-polyval(**x**,**a**)).^2;  end;  **err1**=err\*err';  **err1**=sqrt(**err1**/length(**x**));  endfunction |

|  |
| --- |
| //Исходный текст сценария PrimerMNK.sce  //По данным x и y получает полиномы 1, 2, 3, 4, 5 степеней по МНК  // вычисляет СКО этих полиномов и в графическом окне строит исходные //данные и графики полиномов  clf  z=[x;y];  plot(x,y,'red\*');  a1=[0;0];  exec("MNK.sce");  [s1,err1]=MNK(x,y,a1);  exec("SKO.sce");  sko1=SKO(x,y,s1);  exec("polyval.sce");  a1=s1'  sko1  xx=x(1):(x(length(x))-x(1))/100:x(length(x));  y1=polyval(xx,s1);  plot(xx,y1,'blue');  sleep(1000);  a2=[0;0;0];  [s2,err2]=MNK(x,y,a2);  sko2=SKO(x,y,s2);  a2=s2'  sko2  y2=polyval(xx,s2);  plot(xx,y2,'green');  sleep(1000);  a3=[0;0;0;0];  [s3,err3]=MNK(x,y,a3);  sko3=SKO(x,y,s3);  a3=s3'  sko3  y3=polyval(xx,s3);  plot(xx,y3,'cyan');  sleep(1000);  a4=[0;0;0;0;0];  [s4,err4]=MNK(x,y,a4);  sko4=SKO(x,y,s4);  a4=s4'  sko4  y4=polyval(xx,s4);  plot(xx,y4,'magenta');  sleep(1000);  a5=[0;0;0;0;0;0];  [s5,err5]=MNK(x,y,a5);  sko5=SKO(x,y,s5);  a5=s5'  sko5  y5=polyval(xx,s5);  plot(xx,y5,'grey');  sleep(1000); |

### Лабораторная работа по теме №4 *«Численное интегрирование»*

#### 3.1. Вопросы, подлежащие изучению

1. Постановка задачи численного интегрирования.
2. Методы прямоугольников, трапеций, Симпсона.
3. Оценка погрешности численного интегрирования. Правило Рунге.
4. Графическая иллюстрация методов прямоугольников, трапеций и Симпсона.

#### 3.2. Задание

1. Выбрать индивидуальное задание из табл.3-1 для численного интегрирования:

* **f(x)** – подынтегральную функцию;
* **a, b**– пределы интегрирования;
* методы интегрирования для выполнения п.**2** – значение в столбце **t**и**m**;
* начальный шаг интегрирования **h0.**

При этом значения в столбцах t и m означают: 1 –интегрирование методом средних прямоугольников, 2 – методом трапеций, 3 – методом Симпсона.

1. В сценарии пакета Scilab создать функцию для вычисления интеграла по 1-му заданному методу, определяя значения (столбец **m**)из табл. 3-1, с шагом  и  ( и ).
2. Провести **оценку погрешностей полученных результатов** по правилу **Рунге**.
3. Провести **оценку погрешностей полученных результатов** по правилу **Рунге**.
4. Написать и выполнить программу вычисляется интеграла по 2-му заданному методу (столбец **t** из табл. 3-1) с точностью 10-4.
5. Вычислить заданный интеграл с использованием функции intg пакета Scilab.

#### 3.3. Варианты задания

Таблица 3-1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Подынтегральная функция** | **a** | **b** | **t** | **m** |  |
| **1** | **f(x) = 8 e-x sin(-2x)** | 2 | 3 | 1 | 3 | 0.25 |
| **2** | **f(x) = e-x sin(2x)** | 0 | 2 | 2 | 1 | 0.5 |
| **3** | **f(x) = x3/2 – 2 x sin(x)** | 3 | 4 | 3 | 2 | 0.25 |
| **4** | **f(x) = e-xcos(-2x)** | 2 | 4 | 1 | 3 | 0.5 |
| **5** | **f(x) = cos(2x) + 2 sin(x)** | 1 | 3 | 2 | 1 | 0.5 |
| **6** | **f(x) = 8 sin(2x) – x** | 0.2 | 1.2 | 3 | 2 | 0.25 |
| **7** | **f(x) = 5 cos(-2x) e-x** | -0.5 | 0.5 | 2 | 3 | 0.25 |
| **8** | **f(x) = x sin(x + 1) – cos(x – 5)** | 1 | 2 | 1 | 2 | 0.25 |
| **9** | **f(x) = 0,25 x3 + cos(x/4)** | 1 | 3 | 1 | 3 | 0,5 |
| **10** | **f(x) = sin(2x) – 2 sin(x)** | 3.5 | 5 | 1 | 3 | 0.5 |
| **11** | **f(x) = sin(ex) – e-x +1** | 0 | 1 | 2 | 1 | 0.25 |
| **12** | **f(x) = 5 x sin(x + 1) + 2 cos(x)** | 1 | 2 | 1 | 2 | 0.25 |
| **13** | **f(x) = 5 e-x + 4 x + x3/3** | -1 | 1 | 1 | 2 | 0.5 |
| **14** | **f(x) = -2 sin(4x) ln(-x) + 5** | -2.5 | -1.5 | 1 | 3 | 0.25 |
| **15** | **f(x) = sin(x – 1) – x cos(x + 3)** | -4 | -2 | 3 | 1 | 0.5 |
| **16** | **f(x) = 4 sin (x) – x1/2** | 1 | 2 | 2 | 3 | 0.25 |
| **17** | **f(x) = 5 sin3(x) + cos3(x)** | 1 | 2 | 2 | 1 | 0.25 |
| **18** | **f(x) = cos(2x + 1) ln (2 / x) + 3** | 1 | 3 | 3 | 2 | 0.5 |
| **19** | **f(x) = 3 cos(x2) / ln(x + 5)** | -1 | 1 | 1 | 3 | 0.5 |
| **20** | **f(x) = sin(x2) + 1 / (2 – x)** | -1.5 | 0.5 | 2 | 1 | 0.5 |
| **21** | **f(x) = x sin(x) + cos(x) + 5** | 0 | 2 | 1 | 2 | 0.5 |
| **22** | **f(x) = – cos(x) – cos(2x) – x + 5** | 1 | 3 | 3 | 1 | 0.5 |
| **23** | **f(x) = 1 + sin(4x) / ln(x)** | 1.5 | 2.5 | 1 | 3 | 0.25 |
| **24** | **f(x) = (1 + x2)1/2 + e-x** | -1 | 2 | 2 | 1 | 0.75 |
| **25** | **f(x) = sin(x + 1) e2 / x** | 1 | 2 | 3 | 2 | 0.25 |
| **26** | **f(x) = 2 (1 + x) e-x – 2 cos(x)** | 1 | 4 | 2 | 3 | 0.75 |
| **27** | **f(x) = – 8 sin(– x3) e-x** | 0.4 | 1.4 | 1 | 3 | 0.25 |
| **28** | **f(x) = – 10 sin(x3) cos(– x)** | -1.4 | -0.4 | 2 | 1 | 0.25 |
| **29** | **f(x) = x2cos(x + 3) – 4** | 3 | 4 | 3 | 1 | 0.25 |
| **30** | **f(x) = – cos(x – 5) e2x / 3** | 1 | 3 | 1 | 3 | 0.5 |

#### 

#### 3.4. Содержание отчета

1. Индивидуальное задание.
2. Сценарий пакета Scilab для проведения расчета двумя заданными методами интегралов с шагом  и  ( и ) и значения погрешностей по правилу **Рунге**.
3. Программа вычисления интеграла по 2-му заданному методу с точностью 10-4.
4. Результаты решения, полученные с помощью функции пакета Scilab.

#### 3.5. Пример выполнения задания

1. **Задания для численного интегрирования:**

*  – подынтегральная функция;
* **a=1, b=3**–пределы интегрирования;
* методы интегрирования – средних прямоугольников, трапеций, Симпсона;
* начальный шаг интегрирования **h0=1.**

1. **Вычисление интегралов с шагом  и  ( и ) и оценка его погрешности по правилу Рунге**

Правило Рунге применяют для вычисления погрешности путём двойного просчёта интеграла с шагами **h/2** и **h,**при этом погрешность вычисляется по формуле .

Полагают, что интеграл вычислен с точностью**Е**, если **** тогда , где **** – уточненное значение интеграла, **p** – порядок метода.

Вычислим интеграл по формуле

* **средних прямоугольников** и оценим погрешность интегрирования методом двойного просчёта:







* **трапеций** и оценим погрешность интегрирования методом **двойного просчета**:





* **Симпсона** и оценим погрешность интегрирования методом **двойного просчета**:

 где 







##### 3.6. Вычисление определенных интегралов в Scilab

|  |
| --- |
| --> deff('y=f(x)','y=log(x)');  --> a=1;b=3;  --> [s,ir]=intg(a,b,f)  ir =  1.439D-14  s =  1.2958369 |

##### Контрольные вопросы по теме «Численное интегрирование»

1. Что такое шаг интегрирования?
2. Каким образом связана задача численного интегрирования и интерполяция?
3. Какое влияние оказывает уменьшение числа разбиений на отрезке [a;b] на погрешность интегрирования?
4. Каким образом вычисляется определенный интеграл в случае, если подынтегральная функция задана таблицей с переменным шагом?
5. Какой из изученных вами методов численного интегрирования обладает высшей степенью точности?
6. Зависит ли точность численного интегрирования от величины шага интегрирования?
7. Для чего предназначен метод двойного просчета?
8. Что представляет собой формула для вычисления элементарного интеграла по формуле трапеций?
9. Что представляет собой формула для вычисления элементарного интеграла по формуле Симпсона?
10. Интерполяционным многочленом, какой степени заменяется подынтегральная функция в методе прямоугольников?
11. Интерполяционным многочленом, какой степени заменяется подынтегральная функция в методе трапеций?
12. В каком методе для вычисления интеграла необходимо выбирать количество интервалов разбиения кратное двум?
13. Какой метод позволяет обеспечить вычисление интеграла с заданной точностью?
14. Какой метод численного интегрирования даст наиболее точный результат, если подынтегральная функция имеет вид y = 5x3?
15. В каком методе численного интегрирования подынтегральная функция заменяется квадратичным полиномом?
16. Какой метод численного интегрирования даст точный результат, если подынтегральная функция имеет вид f(x) = x2?
17. Какой метод интегрирования наилучшим образом подходит для вычисления интеграла линейной функции?
18. Обеспечивают ли методы трапеций и метод средних прямоугольников точность одного порядка?
19. Какой из известных вам методов интегрирования обладает наименьшей точностью?
20. Сколько шагов интегрирования содержит элементарный отрезок интегрирования в методе Симпсона?

## Лабораторная работа по теме №4

## «Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений»

### 4.1. Вопросы, подлежащие изучению

1. Постановка задачи численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши.
2. Методы Рунге-Кутты различных порядков, общие свойства.
3. Погрешности методов.
4. Выбор шага интегрирования.
5. Графическая иллюстрация методов Рунге-Кутты.

### 4.2. Задание

1. **Выбрать индивидуальное задание** в табл. 4-1 для решения обыкновенных дифференциальных уравнений**:**

* дифференциальное уравнение ;
* интервал [a;b] , где ищется решение дифференциального уравнения;
* начальные условия x0, y0;
* шаг интегрирования h0**.**

1. **Найти аналитическое решение** заданного дифференциального уравнения, полагая его точным.
2. **Создать в сценарии функцию для вычисления значений полученного решения** на отрезке [a;b] с шагомh0.
3. **Создать в сценарии функцию для вычисления значений численное решение дифференциального уравнения методом Эйлера** -  в точках отрезка [a;b] с шагом h0
4. **Вычислить значения погрешностей** для, ,.
5. **Написать и выполнить программу, реализующую программу** решения дифференциального уравнения **методом Рунге**-**Кутта** 4-го порядка yрк(х) в точках отрезка [a;b] с шагом h0, обеспечив с использованием метода автоматического выбора шага, точность 10-4.
6. **Вычислить значения погрешностей ** для, .
7. **Найти решение дифференциального уравнения** ys(x)использованием функции пакета Scilab ode.
8. **Проиллюстрировать решения** в одной системе координат.

### 4.3. Варианты задания

Таблица 4-1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№**  **вар** | **Уравнение** | **x0** | **y0** | **h0** | **a** | **b** |
| **1** | **y' = x y2** | **0** | **-2** | **0.5** | **0** | **1.5** |
| **2** | **y' = y2 (x2+ x + 1)** | **0** | **-2** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **3** | **y' = x3 y2** | **0** | **-2** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **4** | **y' = y / cos2(x)** | **0** | **1** | **0.25** | **0** | **0.75** |
| **5** | **y' = y cos(x)** | **0** | **1** | **0.5** | **0** | **1.5** |
| **6** | **y' = y2cos(x)** | **0** | **-1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **7** | **y' = x2 y + y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **8** | **y' = (x – 1)2 y2** | **0** | **-1** | **0.5** | **0** | **1.5** |
| **9** | **y' = x3 y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **10** | **y' = y2 sin(x)** | **0** | **0.5** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **11** | **y' = y sin(x)** | **0** | **1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **12** | **y' = x y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **13** | **y' = y2 / x** | **1** | **1** | **0.2** | **1** | **1.6** |
| **14** | **y' = x2 y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **0.5** |
| **15** | **y' = y2 (2 – x)** | **0** | **-1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **16** | **y' = 3 x2 y2** | **0** | **-4** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **17** | **y' = y2 (ex + 4x)** | **0** | **-1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **18** | **y' = y (x – 1)** | **0** | **1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **19** | **y' = x (1 + y2)** | **0** | **0** | **0.25** | **0** | **0.75** |
| **20** | **y' = x / (2y)** | **0** | **1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **21** | **y' = y / (3 x2)** | **1** | **1** | **0.2** | **1** | **1.6** |
| **22** | **y' = 4 x e-3y** | **1** | **0** | **0.2** | **1** | **1.6** |
| **23** | **y' = 2 x y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **24** | **y' = 2 x (y1/2)** | **0** | **1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **25** | **y' = y2 ex** | **0** | **-2** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **26** | **y' = x (1 – y2)1/2** | **0** | **0** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **27** | **y' = (1 + x) y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **28** | **y' = x2 (1 – y2)1/2** | **0** | **0** | **0.1** | **0** | **0.3** |
| **29** | **y' = (x2 + x) y2** | **0** | **-1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **30** | **y' = y2 / cos2(x)** | **0** | **-1** | **0.3** | **0** | **1.5** |

### 4.4. Содержание отчета

1. Индивидуальное задание.
2. Решение ОДУ аналитическим методом.
3. Создать в сценарии функцию для вычисления решения y(x) на отрезке [a;b] с шагом , и записать его в табл. 4-2.
4. Создать в сценарии функцию для вычисления решения ОДУ методом Эйлера -  в точках отрезка [a;b] с шагом h0**,** и записанные в табл. 4-2.
5. Вычислить значения погрешностей  для, , , записать в табл. 4-2.
6. Создать в сценарии функцию для вычисления решения ОДУ методом Рунге-Кутта 4-го порядка  с шагом h0 и записать его в табл. 4-2
7. Вычислить значения погрешностей, , и записать их в табл. 4-2.
8. Решить ОДУ, с использованием функции пакета Scilabode (ys(xi)), и записать его в табл. 4-2.
9. Построить график решений, полученных решений с использованием аналитического метода, метода Эйлера, метода Рунге-Кутта в одной системе координат.

Все решения в итоге должны быть оформлены в виде табл. 4-2.

Таблица4-2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **xi** |  |  |  |  |  | ys(xi) |
| … | … |  |  |  |  |  |

### 4.5. Пример выполнения задания

1. **Задание для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений:**

* дифференциальное уравнение ;
* интервал [0;0.4];
* начальные условия x0=0, y0=1;
* шаг интегрирования h0=0.1.

1. **Точное аналитическое решение заданного дифференциального уравнения**

Найдем точное аналитическое решение заданного дифференциального уравнения (решение y=y(x))методом разделения переменных. Для этого запишем уравнение в виде  и проинтегрируем с учетом начальных условий. Получим . Из начальных условий следует, что с=0.

Аналитическое решение дифференциального уравнения .

1. **Значения точного решения ОДУ –y(x)**

Вычислим в сценарии значения полученного решения **y(xi)** на отрезке [0;0.4] с шагом изменения аргумента h=0.1:

|  |  |
| --- | --- |
| **xi** | **y(xi)** |
| 0 | 1 |
| 0.1 | 1.1051711 |
| 0.2 | 1.2214026 |
| 0.3 | 1.3498585 |
| 0.4 | 1.4918243 |

1. **Численное решение заданного ОДУ методом Эйлера**

Вычислим в сценарии значения численного решение ОДУ методом Эйлера () в точках отрезка [0;0.4] с шагом h=0.1. Для этого ОДУ записывают в виде y’=f(x,y) . Общая формула для определения очередного значения функции по методу Эйлера имеет вид yi+1=yi+h⋅f(xi,yi), где , :

|  |  |
| --- | --- |
| **xi** |  |
| 0 | 1 |
| 0.1 | 1.1000 |
| 0.2 | 1.210000 |
| 0.3 | 1.331000 |
| 0.4 | 1.4641001 |

1. **Значения погрешностей**

Вычислим в сценарии значения погрешностей для,,:

|  |  |
| --- | --- |
| **xi** | **Ei** |
| 0 |  |
| 0.1 | 0.005171 |
| 0.2 | 0.011403 |
| 0.3 | 0.018858 |
| 0.4 | 0.027724 |

1. **Результаты решения ОДУ методом Рунге-Кутта 4-го порядка, дополненным методом автоматического выбора шага, обеспечивающим точность 10-4**

Вычислим в программе значения численного решения ОДУ с точностью 10-4, и получим решение в точках отрезка [0;0.4]с шагом h=0.1 () методом Рунге-Кутта 4-го порядка, используя формулы:



В нашем случае получены следующие значения.

|  |  |
| --- | --- |
| **xi** |  |
| 0 | 1 |
| 0.1 | 1.105171 |
| 0.2 | 1.221403 |
| 0.3 | 1.349859 |
| 0.4 | 1.491825 |

1. **Значения погрешностей**

Вычислим в сценарии значения погрешностей , 

|  |  |
| --- | --- |
| **xi** |  |
| 0 | 0 |
| 0.1 | 0.0000001 |
| 0.2 | 0.0000004 |
| 0.3 | 0.0000005 |
| 0.4 | 0.0000007 |

Все решения, полученные выше, сведем в табл. результатов 4-2:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **xi** | **y(xi)** |  | **Ei** |  |  | ys(xi) |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0.1 | 1.1051711 | 1.1000 | 0.005171 | 1.105171 | 0.0000001 | 1.1051711 |
| 0.2 | 1.2214026 | 1.210000 | 0.011403 | 1.221403 | 0.0000004 | 1.2214026 |
| 0.3 | 1.3498585 | 1.331000 | 0.018858 | 1.349859 | 0.0000005 | 1.3498585 |
| 0.4 | 1.4918243 | 1.4641001 | 0.027724 | 1.491825 | 0.0000007 | 1.4918243 |

– аналитическое решение ОДУ,

 - решение ОДУ, полученное методом Эйлера, ,

- решение ОДУ методом Рунге-Кутты 4-го порядка, .

1. **Решение ОДУ с использованием функции ode пакета Scilab**

|  |
| --- |
| //РешениеОДУy'=y  function yd=f(t,y)  yd=y  endfunction  z=ode(y,t0,t,f);  disp(‘Решение ОДУ функцией ode’);  zz=[t;z]; zz' //таблица решения ОДУ функций ode  -->y=1; t0=0; t=0:0.1:0.4;  -->exec(‘odu.sce’;0);  Решение ОДУ функцией ode  ans =  0. 1.  0.1 1.1051709  0.2 1.2214027  0.3 1.3498588  0.4 1.4918248  -->// Решение ОДУ аналитическим методом  --> y=[1 1.1051711 1.2214026 1.3498585 1.4918243];  -->// решение ОДУ методом Эйлера  -->y1=[1 1.1 1.21 1.331 1.4641];  -->//решение ОДУ методом Рунге-Кутта 4-го порядка  -->y4=[1 1.1051711.221403 1.349859 1.491825];  --> plot(t,z,'k-o',t,y1,'b-',t,y4,'r-')  -->xtitle('Решение ОДУ','x','y(x),y1(x),y4(x)');  -->xgrid();legend('y(x)','y1(x)','y4(x)'); |

### 

**Вывод**: В данном примере значения решений ОДУ методом Рунге-Кутта 4-го порядка (y4(x))и аналитическим методом (y(x)), практически совпадают. В решении ОДУ методом Эйлера(y1(x)), по мере удаления от начальной точки, погрешность накапливается за счет допущений, принятых в методе.

### Контрольные вопросы по теме Методы решения дифференциальных уравнений

1. Что такое обыкновенное дифференциальное уравнение?
2. Что такое порядок ОДУ?
3. Что называется аналитическим решением ОДУ 1-го порядка?
4. Что является общим решением ОДУ?
5. Что является геометрической интерпретацией общего решения ОДУ?
6. Что является численным решением ОДУ?
7. Что относится к начальным условиям при решении ОДУ 1-го порядка численными методами?
8. По какому правилу проводят оценку погрешности решения методов Рунге-Кутты?
9. Как выглядит формула для определения очередного значения функции по методу Рунге-Кутты 1-го порядка?
10. Уменьшение шага интегрирования при использовании методов Рунге-Кутты приводит к уменьшению или увеличению погрешности?
11. В обыкновенном дифференциальном уравнении присутствуют производные разных порядков от одной переменной или только первая производная от нескольких переменных?
12. Методы Рунге-Кутты являются одношаговыми или многошаговыми методами?
13. Сколько раз на каждом шаге необходимо вычислять  в модифицированном методе Эйлера?
14. Очередная точка решения ОДУ методом Рунге-Кутты вычисляется на основании одного или двух предыдущих значений функции?
15. Возможно ли в методах Рунге-Кутты применение переменного шага интегрирования?
16. Процесс решения дифференциального уравнения называется интегрированием или дифференцированием?
17. Каковы формулы оценки погрешности методов Рунге-Кутты?
18. Почему метод Эйлера называют методом Рунге-Кутты первого порядка?
19. С помощью чего при оценке погрешности метода автоматического выбора шага учитывается порядок используемого метода Рунге-Кутты?
20. Можно ли оценить погрешность решения ОДУ**,** не зная точного решения?

## Лабораторная работа по теме №5

## «Одномерная оптимизация»

### 5.1. Вопросы, подлежащие изучению

1. **Постановка** задачи одномерной оптимизации.

Методы оптимизации: метод дихотомии; метод золотого сечения.

1. Условия сходимости методов.
2. Оценка погрешности оптимизации.
3. Графическая иллюстрация процесса оптимизации.
4. Сравнение методов по точности, эффективности деления отрезка унимодальности, по числу итераций, по числу отсчетов исследуемой функции.

### 5.2. Задание

1. **Выбрать индивидуальное задание** по номеру варианта из табл. 5-1 для решения задачи одномерной оптимизации:

* функцию f(x),минимум которой необходимо найти;
* метод **золотое сечение** – четные номера п.3, нечетные –п.4
* метод **дихотомии -** четные номера п.4, нечетные –п.3

1. **Провести исследование индивидуального варианта задания:**

* построить график функции**;**
* выбрать начальный отрезок неопределенности (отрезок, содержащий точку минимума);
* проверить выполнение аналитического условия унимодальности функции на выбранном отрезке.

1. **Создать в сценарии функцию для проведения значений 3-х итераций определить длину отрезка,** содержащего точку минимума, после трех итераций.
2. **Написать и выполнить программу,** реализующую программу метода, вычисляющую координаты точки минимума функции с заданной точностью 10-4.
3. **Вычислить число итераций,** необходимых, чтобы локализовать точку минимума с точностью E1 = 10-4 методами дихотомии и золотого сечения.
4. **Решить задачу оптимизации с**  использованием функции **optim** пакета Scilab.

### 

### 5.3. Варианты задания

Таблица .5-1

|  |  |
| --- | --- |
| **№**  **вар.** | **Целевая функция** |
| **1** | **f(x) = – 2 (1 + x) e–x – 2 cos(x)** |
| **2** | **f(x) = (x – 1)** |
| **3** | **f(x) = 10 sin(x3) cos(-x)** |
| **4** | **f(x) = x2cos(x + 3) – 4** |
| **5** | **f(x) = cos(x – 5) e2x / 3** |
| **6** | **f(x) = – 4 sin(x) + x1 / 2** |
| **7** | **f(x) = – 5 sin3(x) – cos3(x)** |
| **8** | **f(x) = – cos(2x + 1) ln(2 / x) + 3** |
| **9** | **f(x) = x sin(x + 1) – cos(x – 5)** |
| **10** | **f(x) = (1 + x2)1 / 2 + e–x** |
| **11** | **f(x) = – 8 sin(- x3) e–x** |
| **12** | **f(x) = 5 e–x + 4 x + x3 / 3** |
| **13** | **f(x) = sin(x – 1) – x cos(x + 3)** |
| **14** | **f(x) = 3 cos(x2) / ln(x + 5)** |
| **15** | **f(x) = sin(x2) + 1 / (2 – x)** |
| **16** | **f(x) = sin(ex) – e–x + 1** |
| **17** | **f(x) = sin(x + 1) e2 / x** |
| **18** | **f(x) = – 5 x sin(x + 1) + 2 cos(x)** |
| **19** | **f(x) = 1 + sin(4x) / ln(x)** |
| **20** | **f(x) = 2 sin(4x) ln(– x) – 3** |
| **21** | **f(x) = x3 / 2 – 2 x sin(x)** |
| **22** | **f(x) = x sin(x) + cos(x) + 5** |
| **23** | **f(x) = e–x sin(2x)** |
| **24** | **f(x) = sin(2x) – 2 sin(x)** |
| **25** | **f(x) = sin(2x) – x** |
| **26** | **f(x) = cos(– 2x) e–x** |
| **27** | **f(x) = e–x sin(– 2x)** |
| **28** | **f(x) = e–xcos(– 2x)** |
| **29** | **f(x) = cos(x + 2) + cos(2x) + x** |
| **30** | **f(x) = cos(2x) + 2 sin(x)** |

.

### Содержание отчета

1. Индивидуальное задание.
2. Результаты исследования индивидуального варианта задания:

* график функции;
* начальный отрезок неопределенности;
* результаты проверки аналитического условия унимодальности функции на отрезке.

1. Результаты расчета трех итераций ручным методом представить в табл. 5.2.

Таблица 5-2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ итерации** | **a** | **b** | **x1** | **x2** | **f(x1)** | **f(x2)** |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |

1. Программа, реализующая заданный метод с точностью 10-4.
2. Число итераций, необходимые для локализации точки минимума используемыми методами.
3. Решение задачи оптимизации с использованием функции пакета Scilab **optim**

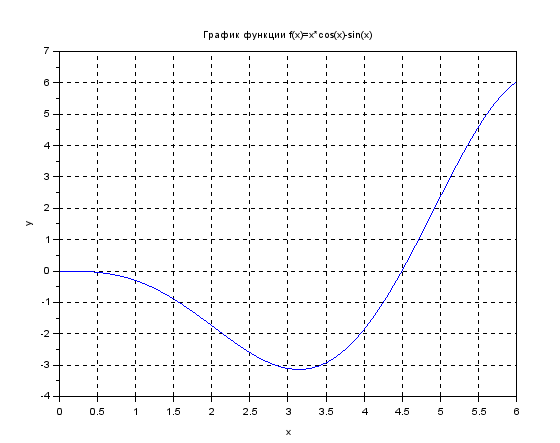
### Пример выполнения контрольного задания

1. **Задание для решения задачи одномерной оптимизации:**

* функция, для которой необходимо найти минимум – ;

1. **Исследование задания:**

* график функции , построенный на достаточно большом отрезке ОДЗ функции:



* выберем по построенному графику функции начальный отрезок неопределенности (отрезок, содержащий точку минимума): отрезок [2.5;3.5];
* проверим выполнение аналитического условия унимодальности функции на выбранном отрезке:

;

 при , так как sin(x) и cos(x) не

обращаются в нуль одновременно и .

Значениясведем в следующую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **х** | 2.5 | 2.6 | 2.7 | 2.8 | 2.9 | 3.0 | 3.1 | 3.2 | 3.3 | 3.4 | 3.5 |
| **f’(x)** | -1.44 | -1.34 | -1.15 | -0.94 | -0.69 | -0.42 | -0.13 | 0.19 | 0.52 | 0.87 | 1.23 |

На отрезке [2.5;3.5**]** функция  монотонно возрастает, следовательно, функцияf(x) - на выбранном отрезке унимодальная.

### *Метод золотого сечения*

1. **Результаты выполнения функции, реализующей метод золотого сечения и длина отрезка, содержащего точку минимума после трех итераций**

Для проведения расчетов по методу золотого сечения следует создать сценарий и выполнить расчеты 3-х итераций. Ниже приведен пример 1-й итерации:

1). 





Вычислить аналогично следующие 2 итерации, а результаты расчетов свести в таблицу 5.2:

Таблица 5-2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | **a** | **b** | **x1** | **x2** | **f(x1)** | **f(x2)** |  |
| 0 | 2.5 | 3.5 | 2.88197 | 3.11803 | -3.04210 | -3.14073 | 0.61803 |
| 1 | 2.88197 | 3.5 | 3.11803 | 3.26393 | -3.14073 | -3.11750 | 0.38197 |
| 2 | 2.88197 | 3.26393 | 3.02786 | 3.11803 | -3.12179 | -3.14073 | 0.23607 |
| 3 | 3.02786 | 3.26393 |  |  |  |  |  |

Для метода золотого сечения теоретическая длина отрезка неопределенности после трех итераций равна , что совпадает с полученной длиной отрезка неопределенности.

1. **Число итераций, необходимых длялокализации точки минимума и Е=10-4**

Теоретическая величина погрешности для метода золотого сечения определяется длиной конечного отрезка неопределенности после **N**итераций . Отсюда имеем ,  (L20=0.000066034).

Длина отрезка равна **0.00011**при расчете на **ПК**(N=19**)** . Точность достигнута при N=20. То есть, расчет совпадает с теоретической оценкой.

### *Метод дихотомии*

**3. Результаты выполнения функции, реализующей метод золотого сечения и длина отрезка, содержащего точку минимума после трех итераций.** Значение параметра **d** метода дихотомии выберем равным **0.01.**

Для проведения расчетов по методу дихотомии следует создать сценарий и выполнить расчеты 3-х итераций. Ниже приведен пример 1-й итерации:

1). 





Вычислить аналогично следующие 2 итерации, а результаты расчетов свести в табл. 5.3:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **a** | **b** | **х1** | **х2** | **f(x1)** | **f(x2)** |  |
| 1 | 2.5 | 3.5 | 2.995 | 3.005 | -3.109 | -3.113 | 0.505 |
| 2 | 2.995 | 3.5 | 3.2425 | 3.2525 | -3.125 | -3.122 | 0.2575 |
| 3 | 2.995 | 3.2525 | 3.119 | 3.129 | -3.1407 | -3.141 | 0.134 |
| 4 | 3.119 | 3.2525 |  |  |  |  |  |

Для метода дихотомии длина отрезка неопределенности после трех итераций равна



1. **Число итераций, необходимых для локализации точки минимума и Е=10-4**

Теоретическая величина погрешности для метода дихотомии определяется длиной конечного отрезка неопределенности после N итераций: . Отсюда, принимая во внимание, что , можно определить соответствующее число итераций: .

Если точностьЕ=0.0001, а параметр метода d==0.00002, то получим: .

В результате расчета на **ПК** при N=13 длина отрезка равна 0.00014**.** Точность достигнута при N=14,т. е. расчет совпадает с теоретической оценкой.

1. **Решение задачи оптимизации с использованием средств пакета Scilab**

|  |
| --- |
| // Построение графика функции  x=2.5:0.1:3.5;  y=x.\*cos(x)-sin(x);  plot(x,y)  xtitle('Графикфункцииf(x)=x\*cos(x)-sin(x)','x','y');  xgrid();  // Решение задачи оптимизации  deff('y=f0(x)','y=x\*cos(x)-sin(x)'); //Описание целевой функции  function [f,g,ind]=costf(x,ind)  f=f0(x)  g=numderivative(f0,x)  endfunction  x0=2.5;  [fmin,xmin]=optim(costf,x0)  -->exec(‘graf.sce’,0);    -->exec(‘opt1.sce’,0);  xmin =  3.1415927  fmin =  -3.1415927 |

### Контрольные вопросы по теме «Одномерная оптимизация»

1. Какое значение функции называют оптимальным?
2. Какой минимум называют локальным?
3. Какой минимум называют глобальный?
4. Каковы необходимые и достаточные условия экстремума функции?
5. Когда применяются численные методы одномерной оптимизации?
6. В чем суть методов одномерного поиска?
7. Что означает понятие «унимодальная функция»?
8. Почему в методах одномерной оптимизации при переходе к следующей итерации часть отрезка можно отбросить?
9. Что влияет на значение параметра метода дихотомии?
10. Какое деление отрезка называют золотым сечением?
11. Влияет ли вид функции на скорость сходимости метода дихотомии?
12. Влияет ли вид функции на скорость сходимости метода золотого сечения?
13. В чем заключается основное достоинство метода золотого сечения?
14. Во сколько раз на очередной итерации уменьшается длина отрезка неопределенности в методе дихотомии?
15. Во сколько раз на очередной итерации уменьшается длина отрезка неопределенности в методе золотого сечения?
16. Как оценивается погрешность методов оптимизации?

Можно ли с использованием численных методов одномерной оптимизации найти максимум функции?

## Лабораторная работа по теме №6

## «Методы многомерной оптимизации»

### 6.1. Вопросы, подлежащие изучению

1. Постановка задачи многомерной оптимизации.
2. Классификация задачи оптимизации.
3. Основные понятия: выпуклое множество, целевая функция, линии уровня, поверхности уровня, градиент скалярной функции и его свойства, локальный и глобальный минимум, выпуклая функция, условия существования минимума функции нескольких переменных.
4. Градиентные методы и алгоритмы оптимизации: метод с дроблением шага;метод наискорейшего спуска аналитический; метод наискорейшего спуска численный.
5. Основные свойства градиентных методов оптимизации, различия методов.
6. Начальная точка траектории поиска минимума, свойства траектории, условия окончания процесса оптимизации.
7. Решение задачи многомерной оптимизации средствами пакета Scilab.

### 6.2. Задание

1. **Выбрать индивидуальное задание** из табл. 6-1 для решения задачи оптимизации функции двух переменных:

* Функцию –f(x, y);
* Методы, заданные для ручного расчета и для расчета на компьютере.

1. **Проверить условия существования точки минимума** заданной функции f(x,y).
2. **Решить задачу многомерной оптимизации аналитическим методом**.
3. **Выбрать начальную точку** x0, y0 итерационного процесса оптимизации.
4. **Провести расчет 3-х итераций 1-м заданным методом**, а результаты расчета свести в табл. 6-2.
5. **Написать программу** получения координат минимума функции 2-м заданным методом с точностью 10-4, результаты расчета свести в табл. 6-3.
6. Используя данные 3-х итераций, **построить в одном графическом окне две траектории спуска (НСА и ГДШ).**и**сделать вывод** о правильности проведенных расчетов**.**
7. **Решить задачу многомерной оптимизации** с использованием функции optim пакета Scilab, **сравнить полученные координаты** точки минимума, вычисленные с использованием пакета, с координатами, полученными аналитическим методом**.**

### 6.3. Варианты задания

Таблица 6-1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Целевая функция** | **Ручной** | **Программа** |
| 1 | f(x,y) = 2 x2 + 3 y2 – 5 x + 6 | ГДШ | НСА |
| 2 | f(x,y) = x2 + 2 y2 – 3 y + 7 | НСА | ГДШ |
| 3 | f(x,y) = 3 x2 + y2 – 15 | ГДШ | НСА |
| 4 | f(x,y) = 3 x2 + 5 y2 + x – 2 | НСА | ГДШ |
| 5 | f(x,y) = 2 x2 + 3 y2 + 2 x – 3 y | ГДШ | НСА |
| 6 | f(x,y) = 5 x2 + 2 y2 + 3 x + 10 | НСА | ГДШ |
| 7 | f(x,y) = 4 x2 + 3 y2 – 3 y – 7 | ГДШ | НСА |
| 8 | f(x,y) = 5 x2 + 6 y2 + 3 x – 2 y + 3 | НСА | ГДШ |
| 9 | f(x,y) = 3 x2 + y2 + - 3 x + y – 2 | ГДШ | НСА |
| 10 | f(x,y) = 6 x2 + 5 y2 – 10 | НСА | ГДШ |
| 11 | f(x,y) = 5 x2 + 2 y2 – 2 x | ГДШ | НСА |
| 12 | f(x,y) = x2 + 2 y2 – 3 x + 5 y + 1 | НСА | ГДШ |
| 13 | f(x,y) = x2 + 4 y2 – 2 x | ГДШ | НСА |
| 14 | f(x,y) = 4 x2 + 3 y2 + y + 3 | НСА | ГДШ |
| 15 | f(x,y) = 3 x2 + y2 + 3 | ГДШ | НСА |
| 16 | f(x,y) = 6 x2 + 4 y2 – 5 x + 3 y –13 | НСА | ГДШ |
| 17 | f(x,y) = 5 x2 + y2 + x | ГДШ | НСА |
| 18 | f(x,y) = x2 + 4 y2 – 2 x + 3 y + 5 | НСА | ГДШ |
| 19 | f(x,y) = 2 x2 + 5 y2 + 2 y + 3 | ГДШ | НСА |
| 20 | f(x,y) = x2 + 3 y2 – x + 2 y + 7 | НСА | ГДШ |
| 21 | f(x,y) = 3 x2 + y2 – y + 3 | ГДШ | НСА |
| 22 | f(x,y) = 6 x2 + 3 y2 + 10 | НСА | ГДШ |
| 23 | f(x,y) = 5 x2 + 4 y2 – 4 x – 11 | ГДШ | НСА |
| 24 | f(x,y) = x2 + 2 y2 – x – y | НСА | ГДШ |
| 25 | f(x,y) = 3 x2 + 2 y2 – 5 y + 1 | ГДШ | НСА |
| 26 | f(x,y) = 3 x2 + 4 y2 – 2 x + 3 y – 5 | НСА | ГДШ |
| 27 | f(x,y) = 4 x2 + 5 y2 + 2 x – 4 y + 12 | ГДШ | НСА |
| 28 | f(x,y) = 6 x2 + 3 y2 – 4 x + 17 | НСА | ГДШ |
| 29 | f(x,y) = x2 + 5 y2 – x + 2 y + 10 | ГДШ | НСА |
| 30 | f(x,y) = 3 x2 + y2 – 10 | НСА | ГДШ |

### 6.4. Содержание отчета

1. Индивидуальное задание, целевая функция, метод для ручного расчета 3-х итераций и метод для программного расчета с заданной точностью.
2. Результаты проверки условия существования точки минимума функции f(x,y).
3. Аналитическое решение задачи оптимизации.
4. Выбор начальной точки численного процесса оптимизации.
5. Результаты решения задачи оптимизации 1-м методом (3 итерации), представленные в табл. 6-2.

Таблица 6-2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **k** | **x** | **y** |  |  |  |  |
| 0 |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |

1. Программа и результаты ее выполнения 2-м методом оптимизации.
2. График 2-х траекторий спуска к точке минимума (3 итерации).
3. Результаты выполнения задания, полученные с помощью математического пакета Scilab.

### 6.5. Пример выполнения задания

1. **Задание для решения задачи многомерной оптимизации:**

* функция – ;
* метод оптимизации для «ручного расчета» - значение параметра **p=3**;
* метод оптимизации для расчета на ПК – значение параметра t=1.

1. **Проверка существования минимума функции**

Известно, что всякий глобальный минимум выпуклой функции является одновременно и локальным.

Проверим, что функция  является выпуклой на множестве R.

**Матрица Гессе** для функции :

,

а угловые миноры:

.

Таким образом, функция  - выпуклая на множестве R**.**

1. **Решение задачи многомерной оптимизации аналитическим методом**

Необходимые условия существования точки экстремума:

 откуда.

1. **Начальная точка итерационного процесса численного решения задачи многомерной оптимизации**

Выберем начальную точку спуска - .

1. **Пример выполнения 1-й итерации методом наискорейшего спуска (НСА):**

Вывод формулы для расчета шага спуска:

 где

Построим функцию

,



Из условия определим параметр :

, k=0, 1,…

**Пример выполнения 1-й итерации по методу НСА:**

1. 



**Важно:** Аналогично выполнить еще 2 итерации, полученные результаты свести в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **k** | **x** | **y** |  |  |  | **k** |
| 0 | 1 | 0.5 | 27.75 | **2** | **3** | 0.2097 |
| 1 | 0.5806 | -0.1290 | 26.3871 | 1.1613 | -0.7742 | 0.3095 |
| 2 | 0.2212 | 0.1105 | 26.0857 | 0.4424 | 0.66359 | 0.2097 |
| 3 | 0.1284 | -0.0285 | 26.0189 |  |  |  |

После 3-х итераций: Xmin=0.1284, ymin=-0.0285, f=21.0189**.**

**Пример выполнение 1-й итерации по методу ГДШ:**



λ=0.5;

1) λ0 =λ



***Проверим условие ГДШ****:*









*да*

***Следовательно*:**

**Важно:** Аналогично выполнить еще 2 итерации, полученные результаты свести в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **k** | **x** | **y** |  |  |  | **k** |
| 0 | 1 | 0.5 | 27.75 | 2 | 3 | 0.125 |
| 1 | 0.75 | 0.125 | 26.75 | 1.5 | 0.75 | 0.25 |
| 2 | 0.375 | -0.0625 | 26.1523 | 0.75 | -0.375 | 0.25 |
| 3 | 0.1875 | 0.0313 | 26.0318 |  |  |  |

После 3-х итераций: Xmin=0.1875, ymin=0.0313, f=26.0318**.**

1. **Построение траектории поиска минимума методами НСА и ГДШ.**

|  |
| --- |
| --> x1=[1,0.5806,0.2212,0.1284];, y1=[0.5,-0.129,0.1105,-0.0285];  --> x2=[1,0.75,0.375,0.1875]; , y2=[0.5,0.125,-0.0625,0.0313];  -->scf(1); plot(x1,y1,'r-o',x2,y2,'b-o');  -->xtitle('Траектории спуска НСА и ГДШ');  -->xgrid  --> legend('- НСА', '- ГДШ',1) |

|  |
| --- |
| //Описание целевой функции  functiony=gg(x)  y=x(1).^2+3\*x(2).^2+26  endfunction  function [f,g,ind]=cst(x,ind) //вспомогательнаяфункция  f=gg(x);  g=numderivative(gg,x);  endfunction  [f,xopt]=optim(cst,x0) //вычислениекоординатточкиминимума  -->x0=[1,1];  -->exec(‘opt2.sce’,0);  xopt =  -0.0000004 7.970D-08  f =  26. |

**Вывод:** Координаты точки минимума, найденные аналитическим методом и методом, заложенным в функции optim пакета Scilab, совпадают с точностью 7.970D-08.

### Контрольные вопросы по теме «Многомерная оптимизация»

1. На какие задачи делится задача оптимизации в зависимости от количества параметров целевой функции?
2. Какая функция называется целевой функцией?
3. Как называется задача оптимизации, если на значения параметров оптимизации существуют ограничения?
4. Что такое градиент?
5. Куда направлен антиградиент?
6. Чему равен модуль антиградиента в точке минимума?
7. Что такое линия уровня?
8. Что такое траектория спуска?
9. Что является условием окончания итерационного процесса по отысканию точки минимума в методах спуска?
10. Что является условием существования минимума для функции от двух переменных?
11. Как выбирается начальная точка при решении задачи многомерной оптимизации?
12. С каким направлением в градиентных методах совпадает движение к точке минимума?
13. Что является достаточным условием существования минимума функции нескольких переменных?
14. Какая точка называется точкой стационарности **?
15. Что показывает модуль градиента?
16. Какое значение в методе ГДШ принимается за начальное значение шага ?
17. Как осуществляется поиск очередной точки траектории спуска в методе наискорейшего спуска?
18. Что нужно сделать, чтобы с использованием метода наискорейшего спуска найти максимум функции f(x1, x2)?
19. Для чего используется метод одномерной оптимизации в численном методе наискорейшего спуска (НСЧ)?
20. Как называется множество точек, для которых целевая функция принимает постоянное значение?

# 

# Список литературы

1. Семенова Т.И., Кравченко О.М., Шакин В.Н., Вычислительные модели и алгоритмы решения задач численными методами: учебное пособие. -М.:ЭБС МТУСИ, 2017.- 82с. Режим доступа: <http://www.mtuci.ru/structure/library/catalogue/download.php?book_id=1819>.
2. Семенова Т.И., Юсков И.О., Юскова И.Б. Алгоритмизация вычислительных задач, [Электронный ресурс] / МТУСИ. – М., 2017. – 62с. Режим доступа: <http://www.mtuci.ru/structure/library/catalogue/download.php?book_id=1833>.
3. Шакин В. Н., Семенова Т. И., Фриск В. В. Базовые средства математического пакета Scilab. Учебник для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2019 – 336 с.: ил.

# Содержание

Общие рекомендации по использованию лабораторного практикума………………………………………..…………….........……3

1. Лабораторная работа по теме «Методы решения нелинейных

уравнений» ………………………………………………………….…… 5

1. Лабораторная работа по теме «Интерполяция функций» ...…………. 15
2. Лабораторная работа по теме «Численное интегрирование» .. ……...25
3. Лабораторная работа по теме «Методы решения

обыкновенных дифференциальных уравнений» …………………….30

1. Лабораторная работа по теме «Одномерная оптимизация» ……..…...37
2. Лабораторная работа по теме «Методы многомерной

оптимизации» ... ………………………………………………….….....44

Список литературы ...............................................................................50